M2 – MFA 2014 – 2015

J.-P. CROISILLE & D. YE

Equations de la mécanique des fluides

Feuille 1

1 – On note $\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto a(\underline{x}) \in \mathbb{R}$ un champ scalaire

$\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \underline{A}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel

Les opérateurs grad, div, rot s'écrivent en composantes

- $\underline{\text{grad}}\, a_{|i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i} a(\underline{x})$, $i = 1, 2, 3$ (noté $\underline{\nabla} a(\underline{x})$)
- $\text{div}\, \underline{A} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial}{\partial x_j} A_j(\underline{x})$
- $\underline{\text{rot}}\, \underline{A}_{|i} = \dfrac{\partial}{\partial x_{i+1}} A_{i+2}(\underline{x}) - \dfrac{\partial}{\partial x_{i+2}} A_{i+1}(\underline{x})$ avec permutation circulaire sur $i = 1, 2, 3$

N.B. On note également $\underline{\nabla} \wedge \underline{A}$ ou $\underline{\nabla} \times \underline{A}$ le rotationnel.

Montrer pour $a(\underline{x}), b(\underline{x})$ champs scalaires et $\underline{A}(\underline{x}), \underline{B}(\underline{x})$ champs vectoriels les relations suivantes :

1 – $\text{div}(\underline{A} \wedge \underline{B}) = \underline{B} . \underline{\nabla} \wedge \underline{A} - \underline{A} . \underline{\nabla} \wedge \underline{B}$.

2 – $\nabla \wedge (\underline{A} \wedge \underline{B}) = (B . \nabla) \underline{A} - B (\text{div}\, \underline{A})$

$\qquad - (A . \nabla) B + \underline{A}\, \text{div}\, \underline{B}$.

3 – $\nabla (\underline{A} . \underline{B}) = (\underline{B} . \underline{\nabla}) \underline{A} + (\underline{A} . \underline{\nabla}) \underline{B} + \underline{B} \wedge (\underline{\nabla} \wedge \underline{A}) + \underline{A} \wedge (\underline{\nabla} \wedge \underline{B})$.

4 – $\underline{\nabla} \wedge (\underline{\nabla} a) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $\text{div}(\underline{\nabla} \wedge \underline{A}) = 0_{\mathbb{R}}$

5 – $\Delta \underline{A} = \underline{\nabla}(\text{div}\, \underline{A}) - \underline{\nabla} \wedge (\underline{\nabla} \wedge \underline{A})$.

6 – $(\underline{A} . \nabla) \underline{A} = \nabla \left(\frac{1}{2} |A|^2 \right) - \underline{A} \wedge (\underline{\nabla} \wedge \underline{A})$.

2 - Pour $\omega : \underline{x}\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \omega(\underline{x})$, on note $\underline{x}' = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \Omega \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega(\underline{x}) \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$ - On définir l'opérateur $\underline{\nabla}^\perp \omega$ (" grad orthogonal") par

$\underline{\nabla}^\perp \omega = (-\partial_2 \omega, \partial_1 \omega)$ - Préciser le lien entre $\underline{\nabla} \wedge \underline{\Omega}$ et $\underline{\nabla}^\perp \omega$.

3 - On considère l'équation de Navier-Stokes incompressible dans $\underline{x}\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$

(1) $\partial_t \underline{u} + \underline{u} . \nabla \underline{u} + \nabla p - \nu \Delta \underline{u} = 0$, $\nu > 0$

où $(\underline{x}, t) \mapsto \underline{u} = (u_1(\underline{x}, t), u_2(\underline{x}, t)) \in \mathbb{R}^2$ est la vitesse du fluide, qui vérifie de plus $\mathrm{div}\, \underline{u} = 0$.

a) Montrer qu'il existe une fonction, appelée Fonction de courant, $(\underline{x}, t) \mapsto \psi(\underline{x}, t)$ tel que

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \underline{\nabla}^\perp \psi(\underline{x}, t).$$

b) Montrer que $\omega(\underline{x}, t) = \partial_1 u_2(\underline{x}, t) - \partial_2 u_1(\underline{x}, t)$ satisfait l'équation

(2) $\partial_t \omega + \underline{u} . \nabla \omega - \nu \Delta \omega = 0$

c) Vérifier que $\omega = \Delta \psi$ - En déduire que l'équation de Navier-Stokes peut s'écrire

(3) $\partial_t (\Delta \psi) + \nabla^\perp \psi . \nabla (\Delta \psi) - \nu \Delta^2 \psi = 0$

Dans (3) Δ^2 désigne l'opérateur biharmonique défini par $\Delta^2 \psi = \Delta(\Delta \psi) = \partial_1^4 \psi + \partial_2^4 \psi + 2 \partial_1^2 \partial_2^2 \psi$.